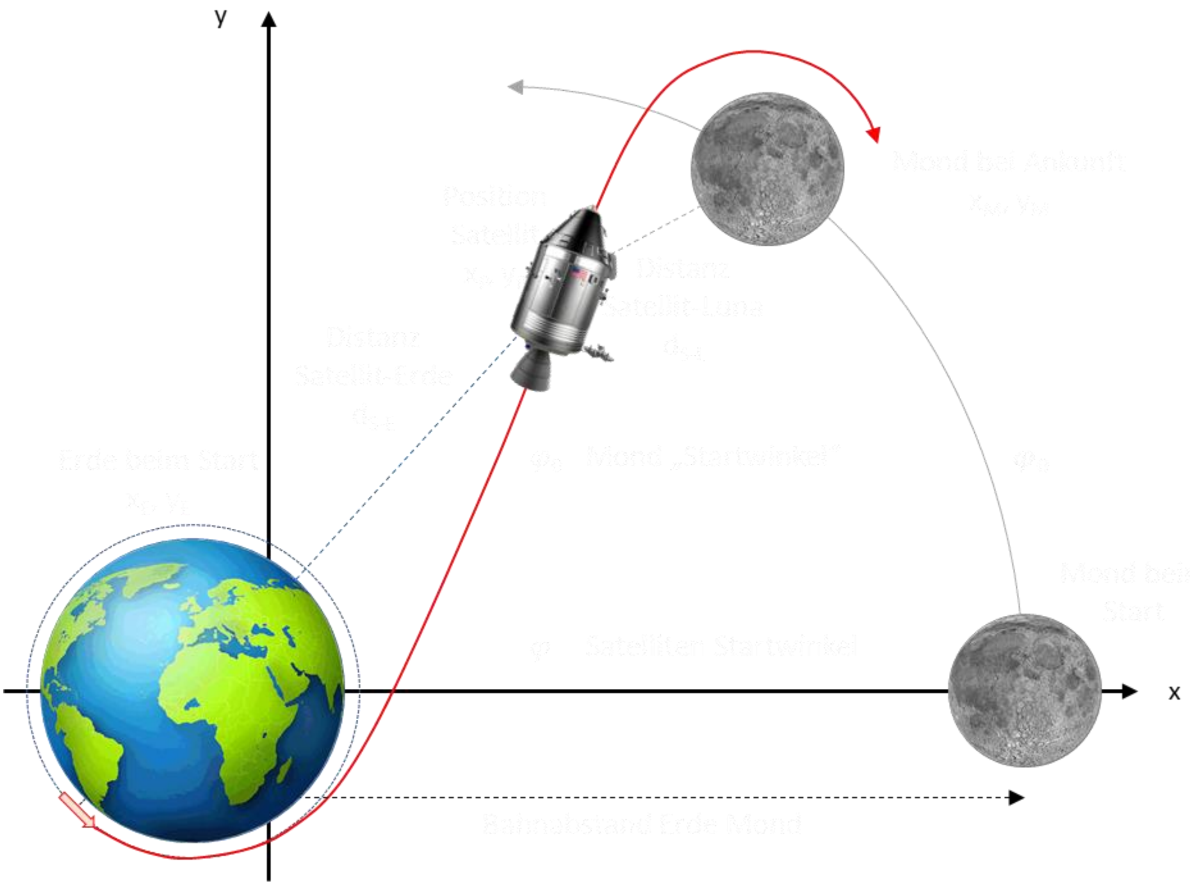
Flug zum Mond



Inhaltsverzeichnis:

Autor:

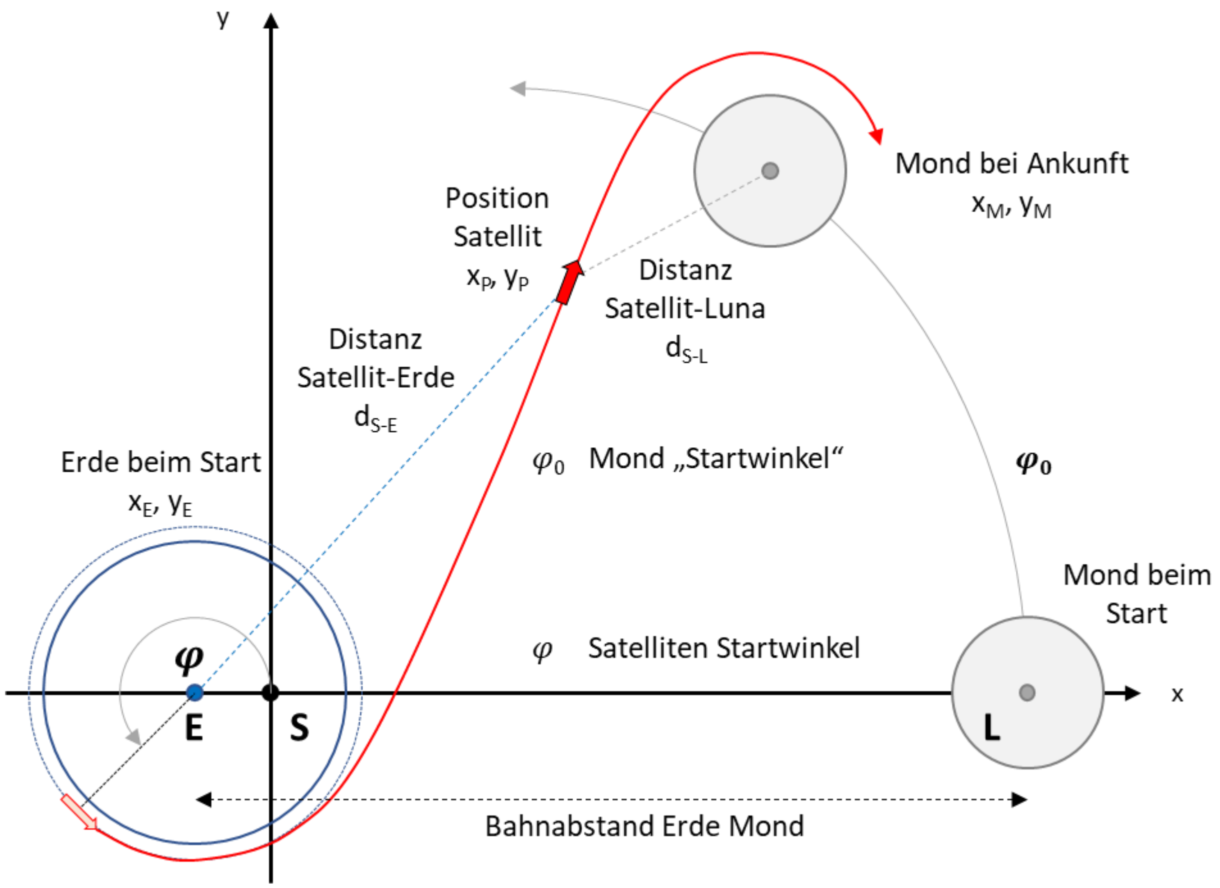
Michael Bischoff, Parkstr. 49, D-89250 Senden

Mail: michael.h.bischoff@t-online.de

1. Flug zum Mond

Aufgabe: Die Flugbahn eines Satelliten der von einer Erdumlaufbahn zum Mond fliegt soll bestimmt werden. (siehe auch die Unterlage in WIS/ Sterne und Weltraum von Dr. Bernd Loibl Lit 3):

Das Diagramm zeigt alle wesentlichen Details der Anordnung von Erde, Mond und Satellit.



Dazu benötigen wir:

- ein passendes Koordinatensystem
- die Bewegungsdaten des bewegten Mondes in Relation zur Erde
- und die Startwerte des um die Erde kreisenden Satelliten.

Hierbei werden die numerischen Berechnungen des Drei-Körper Problems für Erde, Mond und Satellit mit Hilfe des bekannten Runge-Kutta Verfahrens durchgeführt (Lit. 1 und 2)

Koordinatensystem:

Der Mond mit der Masse M_M von 7,35E+22 kg umkreist die Erde mit der Masse M_E von 5,97E+24 kg auf einer leicht elliptischen Planetenbahn mit der Exzentrizität von 0,0549 bei einer Umlaufzeit von 27,322 Tagen in einem mittleren Mond Bahnradius Abstand von R_{Bahn} = 384.400 km. Der Mond befindet sich beim Start der Berechnung im x-y Koordinatensystem auf der positiven x-Achse des gemeinsamen Schwerpunktes des Erde-Mond Systems.

Der Schwerpunktabstand bestimmt sich aus den Massen von Erde und Mond (Luna) und den Strecken zwischen den Schwerpunkten des Koordinatensystems zu den Erd- und dem Mond (Luna) Mittelpunkten

$M_E * \overline{SE} = M_M * \overline{SL}$ mit $\overline{SE} + \overline{SL} = R_{EM}$ folgt

$\overline{SE} = R_{EM} \frac{M_M}{M_E+M_M}$ Abstand des Schwerpunktes zum Erdmittelpunkt

$\overline{SL} = R_{EM} - \overline{SE}$ Abstand des Schwerpunktes zum Mond/ (Luna)-Mittelpunkt

Mond

Der Mond bewegt sich auf einer leicht elliptischen Bahn um die Erde – bzw. um den gemeinsamen Erde-Mond Schwerpunkt S. Die Bahndaten erhält man aus

$R_{EM} = \frac{R_{Bahn}*(1-eps^2)}{1+eps*\cos(\varphi+\varphi_0)}$ hierbei kann mit φ_0 das Startdatum im „Monat" festgelegt werden

$x_{Luna} = \overline{SL} * \cos(\varphi)$ hierbei ist φ der Winkel vom Schwerpunkt zur aktuellen Mondposition

$y_{Luna} = \overline{SL} * \sin(\varphi)$

$\varphi = 2\pi \frac{i*\Delta t}{Umlaufzeit*86400}$ für den -i-ten Berechnungswert und einer zeitlichen Schrittweite Δt

Satellit

Der Satellit befindet sich zum Zeitpunkt t = 0 bzw. dem Iterationsschritt i = 0 beim Start auf einer kreisförmigen Umlaufbahn um den Planeten mit den Startkoordinaten in x-y Richtung.

$X_{P0} = (R_E + Starthöhe) * \cos\left(\pi \frac{Startwinkel}{180}\right) - \overline{SE}$ hierbei ist R_E der Erdradius

$Y_{P0} = (R_E + Starthöhe) * \sin\left(\pi \frac{Startwinkel}{180}\right)$ der Startwinkel von S über E zum Start

Die Geschwindigkeit auf der Umlaufbahn zum Mond beträgt (nach einer „kurzen" Beschleunigungsphase)

$Vx_{P0} = - V_{P0} * \sin\left(\pi \frac{Startwinkel}{180}\right)$ wird positiv bei negativem Wert und Start im 3. Quadranten!

$Vy_{P0} = V_{P0} * \cos\left(\pi \frac{Startwinkel}{180}\right)$ wird negativ bei Start im 3. Quadranten!

Mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz für Erde/ Mond und der Beschleunigungskraft am Satelliten

$F = \frac{GMm}{r^2} * \frac{\vec{r}}{|r|} = \frac{GMm}{r^2} * \left[\frac{\vec{x}}{|r|} + \frac{\vec{y}}{|r|}\right]$ $\vec{F} = m * \vec{a} = m * (\vec{a}_x + \vec{a}_y)$

folgen die (negativen) Beschleunigungskomponenten a_{xE} bzw. a_{yE} vom Satelliten Richtung Erde / Mond

$a_{xE} = -\frac{G*M_E}{d_E^2} * \frac{(X_P-X_E)}{d_E}$ bzw. $a_{yE} = -\frac{G*M_E}{d_E^2} * \frac{(Y_P-Y_E)}{d_E}$ mit der Distanz $r = d_{SE}$

Dabei ist G die Gravitationskonstante und M_E die Masse der Erde (analog M_L und d_{SL} für den Mond).

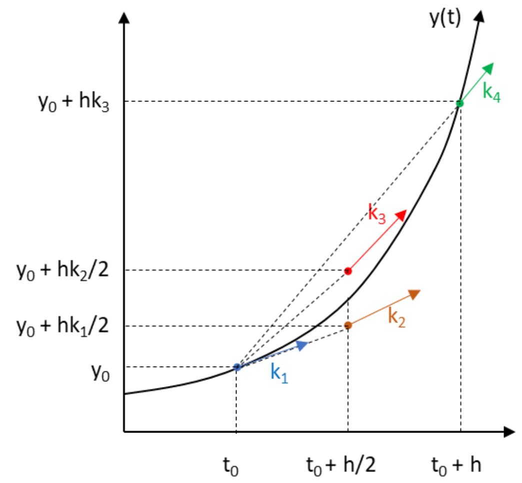
Mit der Beschleunigung kann nun sehr einfach die Geschwindigkeit und der Ort berechnet werden

$Vx_{pi+1} = Vx_{pi} + \Delta t\, a_x$ $Vy_{pi+1} = Vy_{pi} + \Delta t\, a_y$

$X_{pi+1} = X_{pi} + \Delta t\, Vx_{pi}$ $Y_{pi+1} = Y_{pi} + \Delta t\, Vy_{pi}$

Das klassische Runge-Kutta-Verfahren

Das klassische Runge-Kutta-Verfahren (nach Carl Runge im Jahr 1895 vorgeschlagen und durch Wilhelm Kutta später weiter verbessert) verwendet den Ansatz, Ableitungen/ Differentialquotienten durch Differenzenquotienten zu approximieren.



Die dabei auftretenden Fehler (es werden sämtliche höheren Glieder der Taylor-Entwicklung vernachlässigt) können durch geeignete Kombinationen verschiedener Differenzquotienten reduziert werden.

Das Runge-Kutta-Verfahren ist eine Kombination, die Fehler bis zur dritten Ableitung kompensiert.

Weitere Einzelheiten findet man in der Literatur (siehe z.B. A1-b)

Sei $y(t_0) = y_0$ der Startwert der Funktion, so gilt für

Step i $\quad y_i = y(t)$

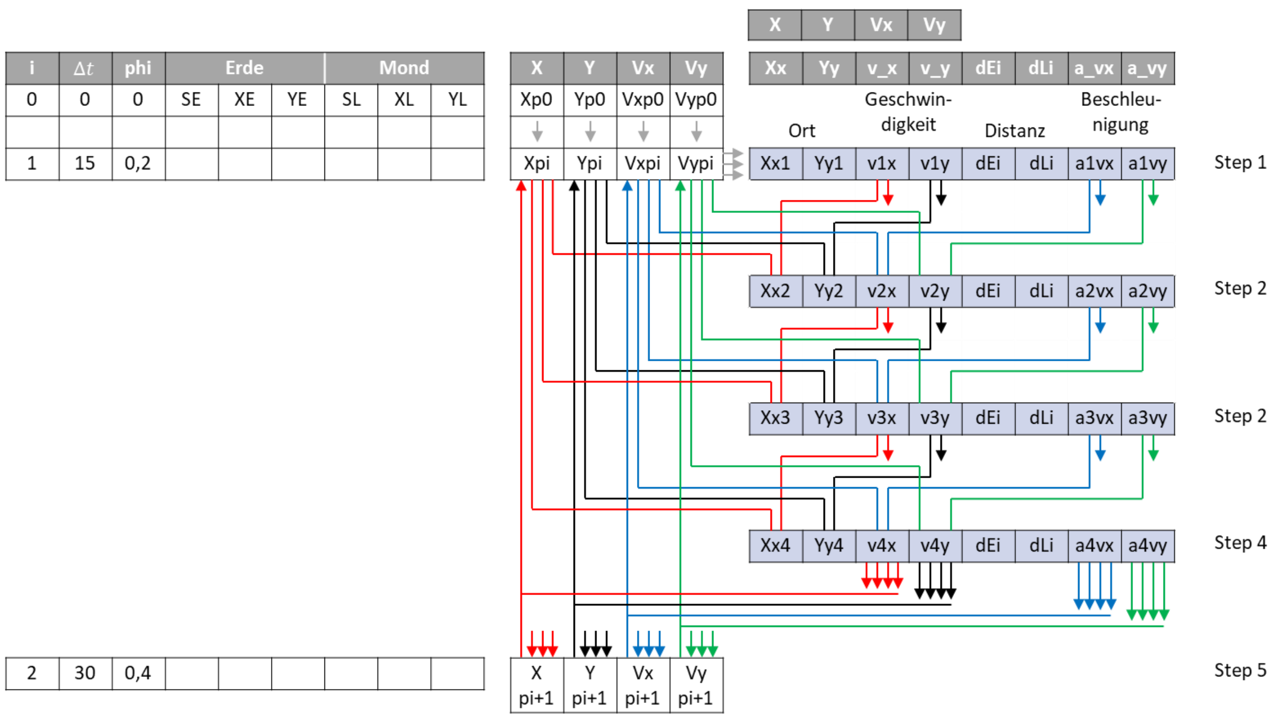
und $\quad k_1 = f(t_i, y_i) \qquad k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\, k_1\right)$

$k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\, k_2\right) \qquad k_4 = f(t_i + h, y_i + h\, k_3)$

Man erhält näherungsweise beim i+1 Schritt den Wert $y(t_{i+1})$ durch folgende Rekursionsgleichung

Step i+1 $\quad y_{i+1} = y_i + h\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Graphische Darstellung des Runge-Kutta Verfahren für die o.a. Gleichungen der Fahrt zum Mond.



Zeitschritt (i): Aufbauend auf den Startwerten für den Ort und die Geschwindigkeit des Satelliten (Index 0) erhält man für den i-ten Zeitschrittes mit der Schrittweite Δt die Werte $X_{Pi}, Y_{Pi}, Vx_{Pi}, Vy_{Pi}$,
dabei die Abkürzungen von $G_E = G * M_E = 398.600\ km^3/s^2$ bzw. für Luna $G_L = G * M_L = 4.903\ km^3/s^2$

Zeitschritt (i+1):

Step 1:

$X_x = X_{Pi}$ $\qquad Y_y = Y_{Pi}$ $\qquad$ Ort

$v_{1x} = Vx_{Pi}$ $\qquad v_{1y} = Vy_{Pi}$ $\qquad$ Geschwindigkeit

$$d_{Ei} = \sqrt{(X_x - X_{Ei})^2 + (Y_y - Y_{Ei})^2} \qquad d_{Li} = \sqrt{(X_x - X_{Li})^2 + (Y_y - Y_{Li})^2}$$

$$a_{1vx} = -\frac{G_E(X_x - X_{Ei})}{d_{Ei}^3} - \frac{G_L(X_x - X_{Li})}{d_{Li}^3} \qquad a_{1vy} = -\frac{G_E(Y_y - Y_{Ei})}{d_{Ei}^3} - \frac{G_L(Y_y - Y_{Li})}{d_{Li}^3}$$

Step 2:

$$\boldsymbol{X_x} = \boldsymbol{X_{Pi}} + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{v_{1x}} \qquad \boldsymbol{Y_y} = \boldsymbol{Y_{Pi}} + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{v_{1y}}$$

$$v_{2x} = Vx_{Pi} + \frac{\Delta t}{2}a_{1vx} \qquad v_{2y} = Vy_{Pi} + \frac{\Delta t}{2}a_{1vy}$$

$$d_{Ei} = \sqrt{(X_x - X_{Ei})^2 + (Y_y - Y_{Ei})^2} \qquad d_{Li} = \sqrt{(X_x - X_{Li})^2 + (Y_y - Y_{Li})^2}$$

$$a_{2vx} = -\frac{G_E(X_x - X_{Ei})}{d_{Ei}^3} - \frac{G_L(X_x - X_{Li})}{d_{Li}^3} \qquad a_{2vy} = -\frac{G_E(Y_y - Y_{Ei})}{d_{Ei}^3} - \frac{G_L(Y_y - Y_{Li})}{d_{Li}^3}$$

Step 3:

$$\boldsymbol{X_x} = \boldsymbol{X_{Pi}} + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{v_{2x}} \qquad \boldsymbol{Y_y} = \boldsymbol{Y_{Pi}} + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{v_{2y}}$$

$$v_{3x} = Vx_{Pi} + \frac{\Delta t}{2}a_{2vx} \qquad v_{3y} = Vy_{Pi} + \frac{\Delta t}{2}a_{2vy}$$

$$d_{Ei} = \sqrt{(X_x - X_{Ei})^2 + (Y_y - Y_{Ei})^2} \qquad d_{Li} = \sqrt{(X_x - X_{Li})^2 + (Y_y - Y_{Li})^2}$$

$$a_{3vx} = -\frac{G_E(X_x - X_{Ei})}{d_{Ei}^3} - \frac{G_L(X_x - X_{Li})}{d_{Li}^3} \qquad a_{3vy} = -\frac{G_E(Y_y - Y_{Ei})}{d_{Ei}^3} - \frac{G_L(Y_y - Y_{Li})}{d_{Li}^3}$$

Step 4:

$$\boldsymbol{X_x} = \boldsymbol{X_{Pi}} + \Delta t\boldsymbol{v_{3x}} \qquad \boldsymbol{Y_y} = \boldsymbol{Y_{Pi}} + \Delta t\boldsymbol{v_{3y}}$$

$$v_{4x} = Vx_{Pi} + \Delta t a_{3vx} \qquad v_{4y} = Vy_{Pi} + \Delta t a_{3vy}$$

$$d_{Ei} = \sqrt{(X_x - X_{Ei})^2 + (Y_y - Y_{Ei})^2} \qquad d_{Li} = \sqrt{(X_x - X_{Li})^2 + (Y_y - Y_{Li})^2}$$

$$a_{4vx} = -\frac{G_E(X_x - X_{Ei})}{d_{Ei}^3} - \frac{G_L(X_x - X_{Li})}{d_{Li}^3} \qquad a_{4vy} = -\frac{G_E(Y_y - Y_{Ei})}{d_{Ei}^3} - \frac{G_L(Y_y - Y_{Li})}{d_{Li}^3}$$

Step 5:

$$X_{Pi+1} = X_{Pi} + \Delta t * (v_{1x} + 2\ v_{2x} + 2\ v_{3x} + v_{4x})/6$$

$$Y_{Pi+1} = Y_{Pi} + \Delta t * (v_{1y} + 2\ v_{2y} + 2\ v_{3y} + v_{4y})/6$$

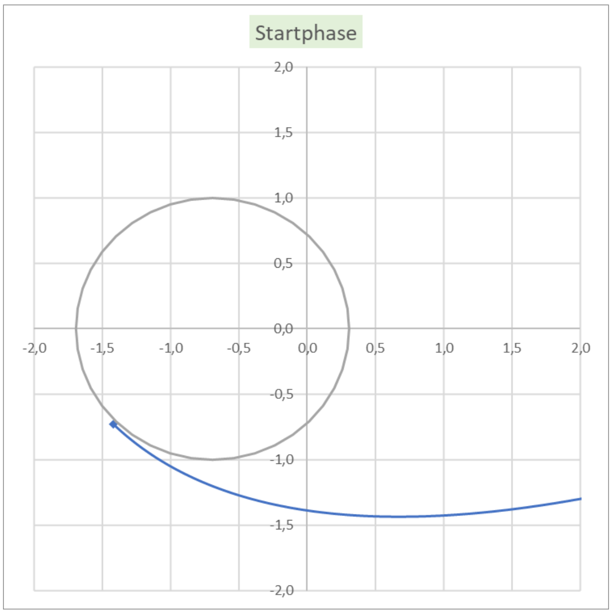
$$Vx_{Pi+1} = Vx_{Pi} + \Delta t * (a_{1\mathrm{vx}} + 2\ a_{2\mathrm{vx}} + 2\ a_{3\mathrm{vx}} + a_{4\mathrm{vx}})/6$$

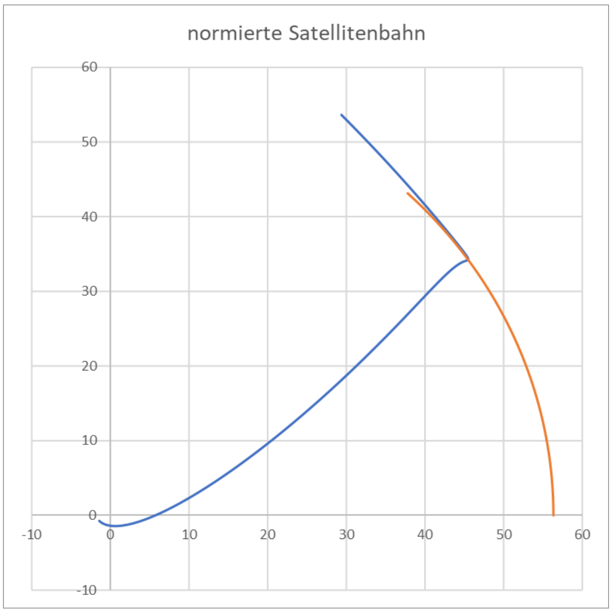
$$Vy_{Pi+1} = Vy_{Pi} + \Delta t * (a_{1\mathrm{vy}} + 2\ a_{2\mathrm{vy}} + 2\ a_{3\mathrm{vy}} + a_{4\mathrm{vy}})/6$$

Beispiele:

Fall 1: Satellit wird durch den Mond stark beschleunigt und dann stark (aber falsch) umgelenkt

Daten: V_{Sat} = 10,96 km/sec – Startwinkel φ = 225,3 Grad

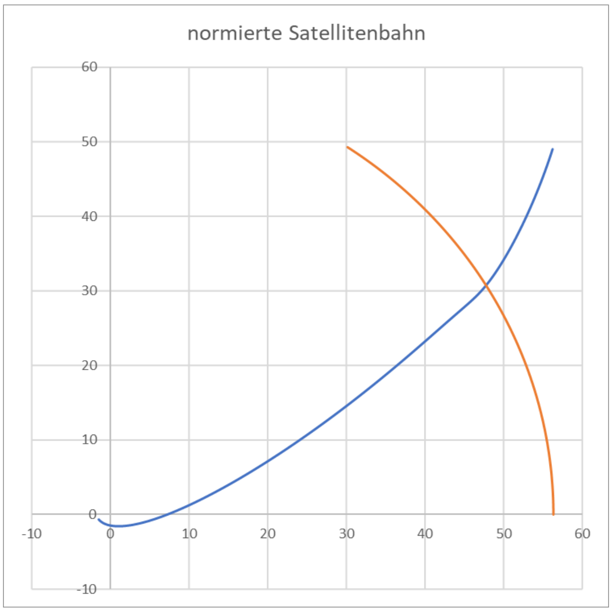




Beachte: die Entfernungsangaben in den Diagrammen sind auf einen Erdradius normiert

Fall 2: Satellit kreuzt die Mondbahn und fliegt am Mond vorbei, da der Startwinkel ungünstig war.

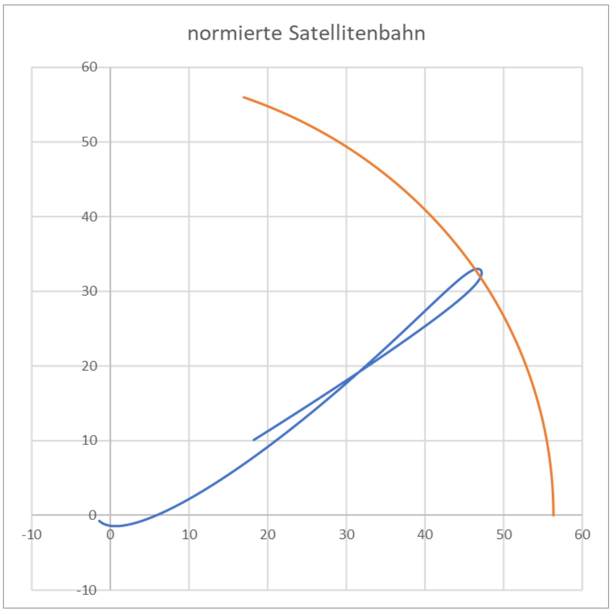
Daten: V_{Sat} = 10,96 km/sec – Startwinkel φ = 220 Grad

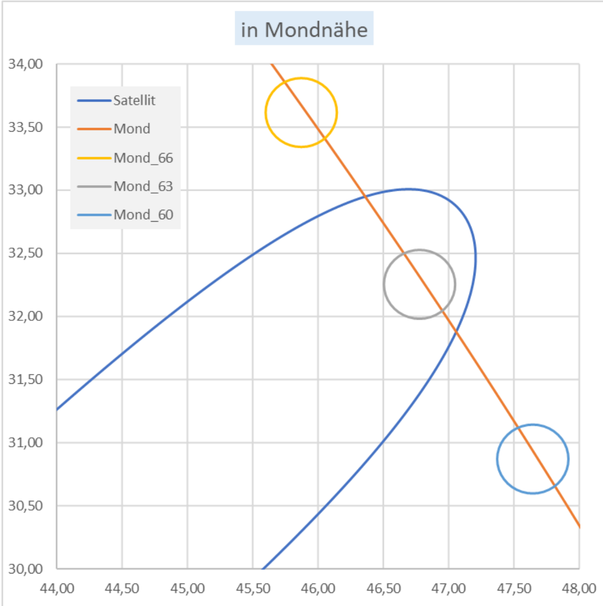


Nebenbei: der Satellit wird in einer großen Ellipse um die Erde kreisen und nach 25 Tagen die Erde wieder erreichen.

Fall 3: Satellit macht eine Schleife um den Mond nach 63 Stunden (Mond_63 in grau) und fliegt dann zurück

Daten: V_{Sat} = 10,972 km/sec – Startwinkel φ = 225,1 Grad

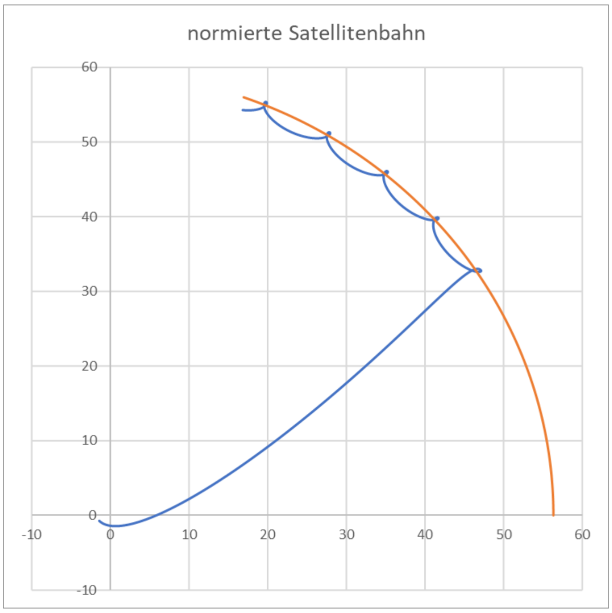


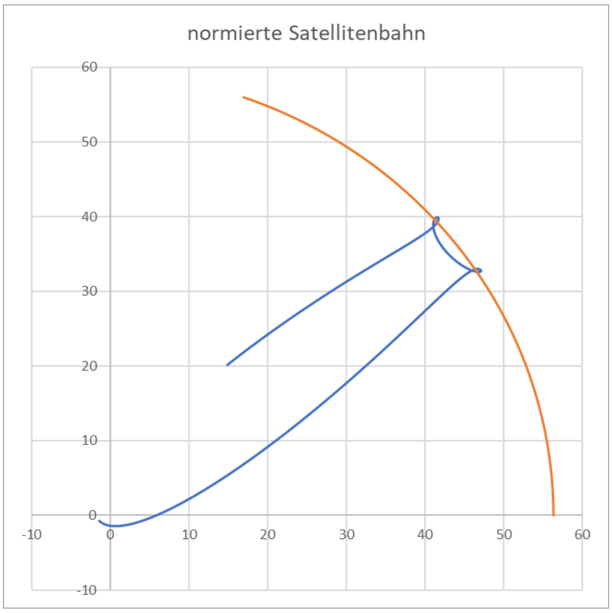


Geschwindigkeit und Startwinkel sind richtig gewählt für einen Flug zum/ um den Mond. Das Startfenster muss auf 0,1 Grad – also – 24 Sekunden eingehalten werden.

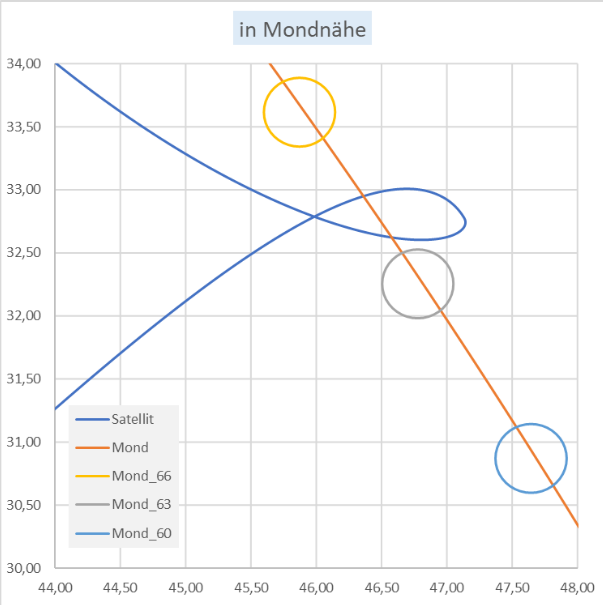
Fall 4: Satellit wird am Mond auf eine Umlaufbahn abgebremst und fliegt nach Neustart wieder zurück

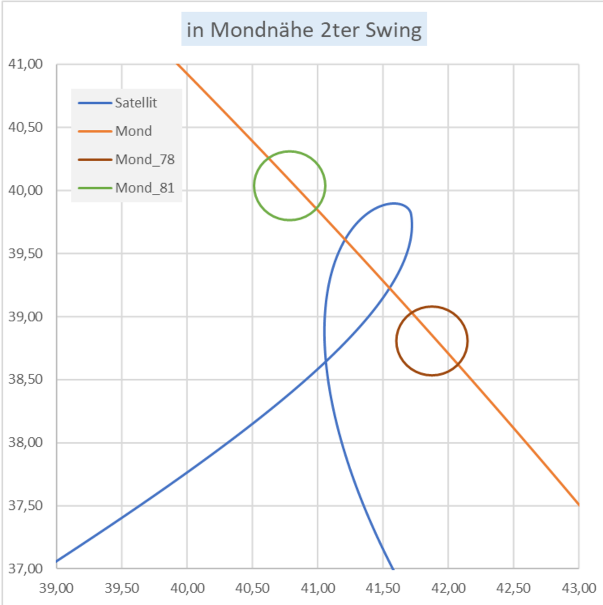
Daten: V_{Sat} = 10,972 km/sec – Startwinkel φ = 225,1 Grad





Bremsmanöver bei T = 230.400 Sekunden (= 64 Stunden) mit Geschwindigkeitsfaktor 0,4
(in Zeile 15374 mit Δt = 15 sec) mit mehreren Mondumläufen bzw. Rückflug nach dem zweiten Swing.



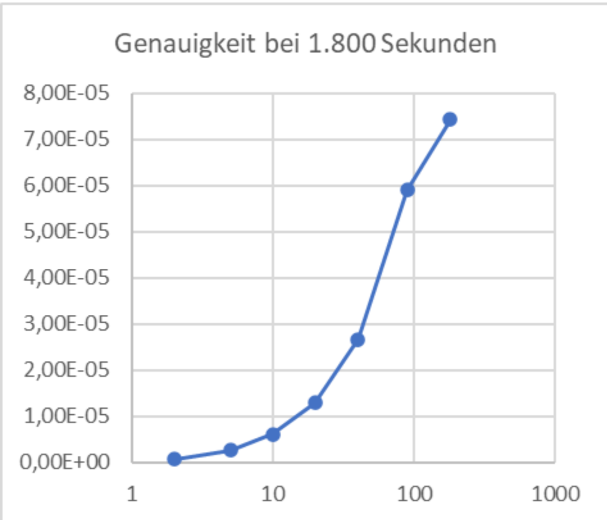


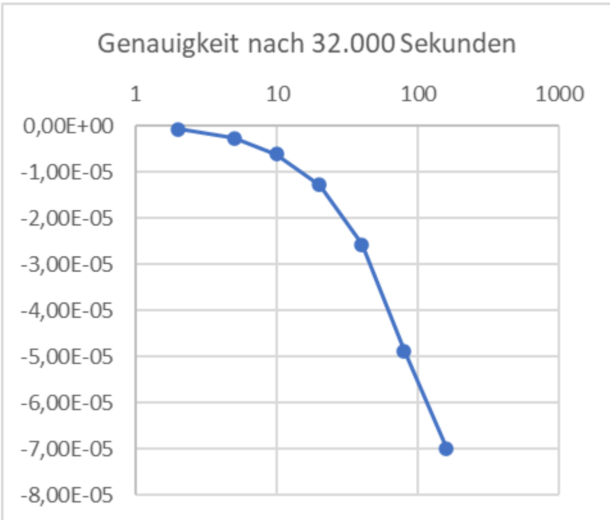
Startmanöver bei T = 288.735 Sekunden (= 80 Stunden und 12 Minuten und 15 Sekunden) mit Geschwindigkeitsfaktor 2,3 (in Zeile 19263 mit $\Delta t = 15$ sec)

Überprüfung der Fehler/ Genauigkeit der numerischen Berechnung.

Zur Abschätzung der Genauigkeit wurden die Ergebnisse der x, y Position des Satelliten bei unterschiedlicher Schrittweite Δt zwischen 1 Sekunde und 160/ 180 Sekunden berechnet einmal 30 Minuten nach dem Start in Erdnähe und dann nach ca. 88 Stunden nach dem Start bestimmt.

Wie man den u.a. Diagrammen entnehmen kann ist die Position in der Größenordnung 10^{-4} (bezogen auf den 1 Sekundenwert) genau.





2. Hinweise zum Excel Berechnungsprogramm

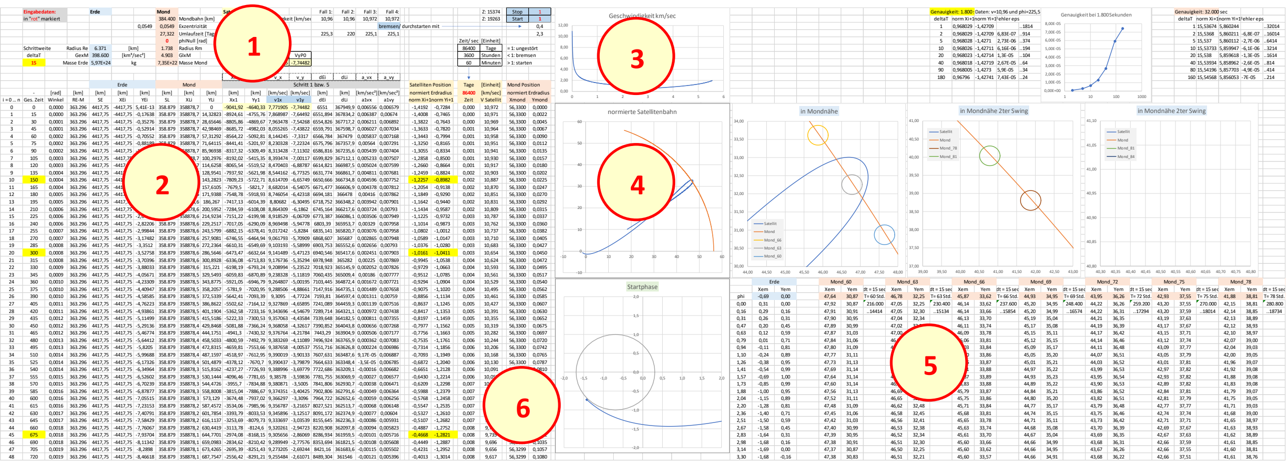
Für die Berechnung der Bahndaten wird eine Excel Datei von ca. 40 Mbyte verwendet. Diese enthält einen Eingabebereich und die Berechnungen mit den graphischen Darstellungen der Ergebnisse.

Eingabebereich:

Eingabedaten:			Erde			Mond			Satellit			
in "rot" markiert						384.400	Mondbahn [km]		10,972	Startgeschwindigkeit [km/sec		
		1			0,0549	0,0549	Exzentrizität		180	Starthöhe [km]		
						27,322	Umlaufzeit [Tage]		225,1	Startwinkel [Grad]		
						0	phiNull [rad]					
Schrittweite		Radius Re	6.371	[km]		1.738	Radius Rm			Startdaten		
deltaT		GexM	398.600	[km^3/sec^2]		4.903	GlxM		XP0	YP0	VxP0	VyP0
15		Masse Erde	5,97E+24	kg		7,35E+22	Masse Mond		-9041,92	-4640,33	7,771905	-7,74482

Die Eingabedaten sind einerseits die gegebenen festen Planetendaten von Erde und Mond wie Erdradius, Gravitationsfaktor etc. und die flexiblen Eingabedaten für die Rakete/ den Satelliten. Die flexiblen Daten sind „rot" markiert. Nach Eingabe einer neuen Zahl dauert es ca. eine Sekunde bis die 32.000 Zeilen umfassende Runge-Kutta Rechnung fertig ist und die Ergebnisse in der Tabelle bzw. in den Graphiken darstellt wird.

Datenbereich:



Zu 1: Eingabebereich der flexiblen Satellitendaten

Zu 2: die ersten berechneten Datensätze von i = 1 bis ca. 50 (von insgesamt 32.000)

Zu 3: Geschwindigkeit des Satelliten

Zu 4: diverse Darstellungen der Ergebnisse, teilweise mit eingeblendeten Mond Positionen

Zu 5: feste Daten für einige Mondpositionen – diese müssen ggf. angepasst werden, wenn sich wesentliche Daten (wie z.B. phiNull des Mondes) geändert haben!

Zu 6: sollte die Landung und der Start der Rakete zum/ vom Mond geändert werden muss dieses im Berechnungssatz angepasst werden (analog zum dargestellten Datensatz in Zeile 15374/ 19263)

3. Literaturverzeichnis/ Dokumente

Nr. #	Literatur	Bemerkung
1	https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_numerischer_Verfahren	Übersicht/ Liste numerischer Verfahren bei Wikipedia
2	https://de.wikipedia.org/wiki/Klassisches_Runge-Kutta-Verfahren	Das klassische Runge-Kutta-Verfahren
3	Dr. Bernd Loibl (Hamburg), Sterne und Weltraum 4/2020 Flug zum Mond – selbst berechnet	Basis der Vorgehensweise, etwas angepasst