

## Magische Quadrate

### 4. Ordnung

1. Grundlagen
2. Gleichungssystem, Lösungsvielfalt
3. Ergebnisse

A1 Literatur

A2 Daten

A3 Berechnungshinweise/ - ablauf

Autor:

Michael Bischoff, Parkstr. 49, D-89250 Senden

## Grundlagen

Die magische Summenzahl „MSum“ eines Quadrates der Ordnung n (also mit n Zeilen/ Spalten) wird im allgemeinen Fall bestimmt aus der Summe der Elemente

$$MSum = \frac{1}{n} \sum_i (Elemente_i) \quad \text{Gleichung (M4-1)}$$

Für den Fall der natürlichen Zahlen von 1 bis  $n^2$  gilt speziell

$$MSum = \frac{1}{2} n (n^2 + 1) \quad \text{Gleichung (M4-2)}$$

Quadrat	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8	9x9	10x10
Mag Sum	15	34	65	111	175	260	369	505

Ein magisches Quadrat der Ordnung 4 wird durch eine Tabelle mit vier Zeilen/ Spalten gebildet. Zum Beispiel dieses von Albrecht Dürer in einem seiner Bilder um 1514 dargestellte Quadrat.

a	b	c	d					16	3	2	13
e	f	g	h					5	10	11	8
i	j	k	l					9	6	7	12
m	n	p	q					4	15	14	1

Wenn man das magische Quadrat von Dürer (oder auch andere) im Detail analysiert stellt man immer fest, dass die magischen Summen auch in weiteren geometrischen Figuren im Quadrat zusätzlich vorkommen. Es ergeben sich also weitere (einschränkende) Nebenbedingungen die zur (Teil-) Lösung des Gleichungssystem beitragen können.

### Extra- / weitere Nebenbedingungen:

Pandiagonal

2	13	16	3	2	13	16	3
11	8	5	10	11	8	5	10
7	12	9	6	7	12	9	6
14	1	4	15	14	1	4	15

Quadrate: innen bzw. in den vier Ecken

		16	3	2	13		
		5	10	11	8		
		9	6	7	12		
		4	15	14	1		

Rechtecke: 4x2 oder 4x3 bzw. 4x4

		2	7	9	16				
		13	12	6	3				
		8	1	15	10				
		11	14	4	5				
		abmn							
				1	10	8	15		
				7	16	2	9		
				14	5	11	4		
				12	3	13	6		
				acmp					
						16	3	2	13
						5	10	11	8
						9	6	7	12
						4	15	14	1
						admq			

Diese Bedingungen können die Vielzahl der freien Wahlparameter im Gleichungssystem mit 16 Unbekannten verringern.

## Gleichungssystem:

### Basisbedingungen:

Zur Bestimmung der Elementwerte muss folgendes Gleichungssystem gelöst werden:

Zeile 1	(1)	$M\text{Sum} = a + b + c + d$
Zeile 2	(2)	$M\text{Sum} = e + f + g + h$
Zeile 3	(3)	$M\text{Sum} = i + j + k + l$
Zeile 4	(4)	$M\text{Sum} = m + n + p + q$
Spalte 1	(5)	$M\text{Sum} = a + e + i + m$
Spalte 2	(6)	$M\text{Sum} = b + f + j + n$
Spalte 3	(7)	$M\text{Sum} = c + g + k + p$
Spalte 4	(8)	$M\text{Sum} = d + h + l + q$
Diagonale 1	(9)	$M\text{Sum} = a + f + k + q$
Diagonale 2	(10)	$M\text{Sum} = d + g + j + m$

Man erhält also für 16 Unbekannte (a ... q) 10 bestimmende Gleichungen für die Zeilenwerte, Spaltenwerte und Diagonalwerte.

### Nebenbedingungen:

Diagonale 3 - blau	(11)	$M\text{Sum} = p + l + e + b$
Diagonale 4 - rot	(12)	$M\text{Sum} = n + i + h + c$
Quadrat - Links Oben	(13)	$M\text{Sum} = a + b + e + f$
Q - Rechts Oben	(14)	$M\text{Sum} = c + d + g + h$
Q - Links Unten	(15)	$M\text{Sum} = i + j + m + n$
Q - Rechts Unten	(16)	$M\text{Sum} = k + l + p + q$
Q - Mitte	(17)	$M\text{Sum} = f + g + j + k$
Rechteck - 4x2	(18)	$M\text{Sum} = a + c + m + n$
Rechteck - 4x3	(19)	$M\text{Sum} = a + c + m + p$
Rechteck - 4x4	(20)	$M\text{Sum} = a + d + m + q$

Wie man sieht kann man weitere Gleichungen (11 ... 20) erkennen/ definieren, die eine Lösung für die 16 unbekannt Elemente eigentlich zulassen sollte.

Mathematisch lassen sich die oben aufgeführten Gleichungen durchaus lösen, dabei müssen aber weitere Einschränkungen wie - nur ganze Zahlen, keine negativen Zahlen und nur bestimmte/ vorgegebene Zahlen - Berücksichtigung finden.

### Einschränkende Randbedingungen sind

1. Die Werte dürfen nur im Wertebereich zwischen 1 und  $n^2$  liegen
2. Die Werte dürfen demzufolge nicht kleiner als 1 sein bzw.
3. Die Werte dürfen nicht größer als  $n^2$  sein
4. Und alle Werte von 1 bis  $n^2$  dürfen nur einmal Verwendung finden

### Lösungsvielfalt/ Transformation:

Die quadratisch magische Anordnung der Zahlen kann durch Transformationen wie

- Drehen um 90, 180 bzw. 270 Grad
- Spiegelung an den Diagonalen von links oben nach rechts unten (und re oben > li unten)
- Spiegelung in der Horizontalen/ Vertikalen

optisch anders dargestellt werden ohne dass sich zusätzliche Lösungen aus der ursprünglichen Basislösung ergeben.

	vertikal	Original	
	13 12 5 4	4 5 12 13	
	3 1 16 14	14 16 1 3	
	10 6 11 7	7 11 6 10	
	8 15 2 9	9 2 15 8	

90 Grad li	diagonal li ob
13 3 10 8	8 10 3 13
12 1 6 15	15 6 1 12
5 16 11 2	2 11 16 5
4 14 7 9	9 7 14 4

**Transformationen**

diagonal re ob	180 Grad rot.	horizontal	90 Grad re
4 14 7 9	8 15 2 9	9 2 15 8	9 7 14 4
5 16 11 2	10 6 11 7	7 11 6 10	2 11 16 5
12 1 6 15	3 1 16 14	14 16 1 3	15 6 1 12
13 3 10 8	13 12 5 4	4 5 12 13	8 10 3 13

Die scheinbare Lösungsvielfalt wird also um den Faktor 8 vergrößert, bzw. man muss aus der gesamten Vielzahl der Lösungsmenge das achtel der wirklichen Basislösung herausfiltern.

Damit dies möglich ist wird die Lösungsmenge wie folgt sortiert

1. In der Zelle a wird die kleinste Zahl eingetragen
2. In der Zelle b die nächstgrößere Zahl
3. ... usw. bis zur letzten Zelle q

Diese Standardform ermöglicht ein zielgerichtetes suchen von weiteren Lösungen.

**Mathematica Lösungsansatz:**

**Basislösung:**

Verwendet man nur die ursprünglichen originären Randbedingungen für die horizontalen Zeilen, die vertikalen Spalten und die beiden Diagonalen so erhält man:

```
Solve[{a + b + c + d == msum, e + f + g + h == msum, i + j + k + l == msum,
löse
m + n + p + q == msum, a + e + i + m == msum, b + f + j + n == msum,
c + g + k + p == msum, a + f + k + q == msum, m + j + g + d == msum},
{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, p, q}]
```

**Solve:** Equations may not give solutions for all "solve" variables.

```
{{d -> -a - b - c + msum,
h -> -e - f - g + msum, j -> 2 a + b + c + e - g + i - msum,
k -> -2 a - b - c - e - f - i + 2 msum, l -> f + g - i,
m -> -a - e - i + msum, n -> -2 a - 2 b - c - e - f + g - i + 2 msum,
p -> 2 a + b + e + f - g + i - msum, q -> a + b + c + e + i - msum}}
```

bzw. als Tabelle

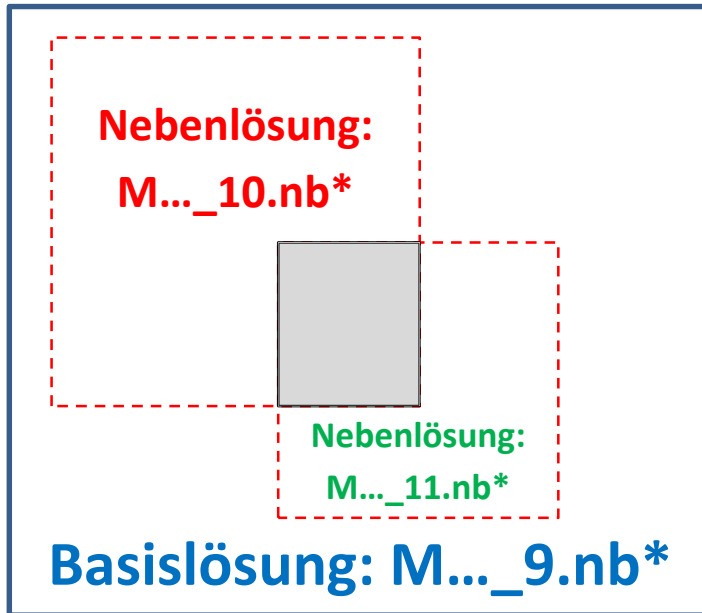
M... 9.nb*					
	Z	S	D	Q	R
	4	3	2		
LM =	57.657.600				
a					
b					
c					
d	= - a - b - c + msum				
e					
f					
g					
h	= - e - f - g + msum				
i					
j	= 2 a + b + c + e - g + i - msum				
k	= -2 a - b - c - e - f - i + 2 msum				
l	= f + g - i				
m	= - a - e - i + msum				
n	= - 2 a - 2 b - c - e - f + g - i + 2 msum				
p	= 2 a + b + e + f - g + i - msum				
q	= a + b + c + e + i - msum				

Das Gleichungssystem mit 16 Unbekannten bei 9 Gleichungen lässt sich auf 7 Laufvariable reduzieren, die eine maximale Lösungsmenge von  $16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 = 57.657.600$  ergibt. Darin sind die wirklichen Lösungen gemäß den einschränkenden Randbedingungen enthalten.

**Extra-/ Nebenlösungen:**

Diverse Lösungsversuche mit unterschiedlichen Zusammenstellungen der 20 Gleichungen führte zu keiner besseren Lösung da offensichtlich einige Gleichungen von anderen ableitbar sind.

Erhöht man die Anzahl der Nebenbedingungen (11 ... 20) so ergeben sich natürlich Teillösungen die aber in zusätzlichen Schritten zu einer Gesamtlösung zusammengefasst werden muss.



Es ist durchaus möglich die Anzahl der Laufvariablen auf nur 5 zu reduzieren (mit dann nur 524.160 möglichen Quadraten). Leider ist vorab nicht absehbar wie viele sinnvolle Lösungen in dieser Lösungsmenge enthalten sein wird. Zudem ergeben sich Überschneidungen der Lösungsmengen (in grau dargestellt) mit zusätzlichen Selektionsaufwand.

Der mathematische Sortieraufwand ist bestimmt in der gleichen Größenordnung wie im Berechnen und sortieren der großen Basislösung (mit 57 Millionen Möglichkeiten).

Die nebenstehende Lösung mit 6 Laufvariablen ergibt zum Beispiel eine Lösungsvielfalt von 432 Lösungen der Basislösung (die gem. Literatur insgesamt 880 Lösungen umfasst) bei einer originären Lösungsmenge von ca. 5,8 Millionen.

Bei einem zehntel der Lösungsvielfalt erhält man immerhin die halbe wahre Basislösung.

Nebenbei:

Die maximale Zeilen-/Spaltenanzahl in Excel beläuft sich auf  $2^{20} = 1.048.576$  Zeilen und auf  $2^{14} = 16.384$  Spalten

M... 10c_ .nb*					
	Z	S	D	Q	R
	4	3	2		1
LM =	5.765.760				
a					
b					
c					
d	= - a - b - c + msum				
e					
f					
g	= 2 a + b + c + f - msum				
h	= - 2 a - b - c - e - 2 f + 2 msum				
i					
j	= e - f + i				
k	= - 2 a - b - c - e - f - i + 2 msum				
l	= 2 a + b + c + 2 f - i - msum				
m	= - a - e - i + msum				
n	= - b - e - i + msum				
p	= - c + e + i				
q	= a + b + c + e + i - msum				

## Ergebnisse

Die 880 Ergebnisse der Berechnung und Selektion können als

- Tabelle und in der Anhang 2.12
- Geometrisch quadratischen Form Anhang 2.13

dargestellt werden, siehe dazu die beiden PDF Dokumente mit jeweils 18 bzw. 16 Seiten.

## A1 Literatur

1. Wie üblich gibt es eine sehr schöne Einführung in die Thematik der magischen Quadrate bei Wikipedia unter [https://de.wikipedia.org/wiki/Magisches\\_Quadrat](https://de.wikipedia.org/wiki/Magisches_Quadrat)
2. Aber auch bei den Mathematischen Basteleien sind interessante Informationen enthalten <http://www.mathematische-basteleien.de/magquadrat.htm>
3. Eine detaillierte Darstellung magischer Quadrate findet man bei Holger Danielsson unter <http://www.magic-squares.info/>
4. Ein sehr ausführliche Darstellung findet man auch bei Walter Trump unter <http://www.trump.de/>

## A2 Datenmaterial

- |  |                                     |
|--|-------------------------------------|
| 1. Mathematica Lösung bei 9 Bedingungen              | MQuad_4Ord_v1_solution_9.nb         |
| 2. Grundlagen und Transformationen                   | Mag_Quad_4_Ordnung_Grundlagen.xlsx  |
| 3. Berechnungsblatt für $a = 1$ und $2$ (ca. 220 MB) | MagQuad_4_Ord_Basis_12.xlsx         |
| 4. Berechnungsblatt für $a = 3$ und $4$ (ca. 220 MB) | MagQuad_4_Ord_Basis_34.xlsx         |
| 5. Berechnungsblatt für $a = 5$ und $6$ (ca. 220 MB) | MagQuad_4_Ord_Basis_56.xlsx         |
| 6. Berechnungsblatt für $a = 7$ und $8$ (ca. 220 MB) | MagQuad_4_Ord_Basis_78.xlsx         |
| 7. Alle Basislösungen für $a = 1/2$ (4 MB)           | MagQuad_4_Ord_alle_BLös_12.xlsx     |
| 8. Alle Basislösungen für $a = 3/4$ (1,4 MB)         | MagQuad_4_Ord_alle_BLös_34.xlsx     |
| 9. Alle Basislösungen für $a = 5/6$ (1,6 MB)         | MagQuad_4_Ord_alle_BLös_56.xlsx     |
| 10. Alle Basislösungen für $a = 7/8$ (1.3 MB)        | MagQuad_4_Ord_alle_BLös_78.xlsx     |
| 11. Selektion aller wahren Lösungen (ca. 94 MB)      | MagQuad_4_Alle_Lösungen_v1...8.xlsx |
| 12. Alle 880 Basislösungen als Tabelle (0,3 MB)      | MagQuad_4_Ord_alle_880_Tabelle.pdf  |
| 13. Alle 880 Basislösungen im Quadrat (2,4 MB)       | MagQuad_4_Ord_alle_880_Quadrat.pdf  |

### A3 Berechnungshinweise/ - ablauf

(siehe Anhang A2 - 3 bis 6)

Berechnungsblatt für a = 1 und 2 - Datei: MagQuad\_4\_Ord\_Basis\_12.xlsx

	X	Y	9	1	1	1	1	1	Mag. Quad. 4. Ordnung		kleiner		Ablauf:	1. Laufvariable A eingeben & berechnen																																					
bis Zeile 524.295	Grenzwert max							34	msum			größ			2. Wertebereich A7:W524295 kopieren																																				
#	A	B	C	E	F	G	I	d	h	j	k	l	m	n	p	q	Test	<<	>>	##	W	mehrfach Test in jeder Zelle																													
Test	16	3	2	5	10	11	9	13	8	6	7	12	4	15	14	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
0	16	3	2	5	10	11	9	13	8	6	7	12	4	15	14	1																																			
1	2	16	9	1	1	1	1	7	31	-4	36	1	30	21	##	-5	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	5	5	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
2	2	16	9	1	1	1	2	7	31	-3	35	0	29	20	##	-4	1	1	1	3	2	1	1	3	3	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
3	2	16	9	1	1	1	3	7	31	-2	34	-1	28	19	##	-3	1	1	1	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	2	16	9	1	1	1	4	7	31	-1	33	-2	27	18	##	-2	1	1	1	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	2	16	9	1	1	1	5	7	31	0	32	-3	26	17	##	-1	1	1	1	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	2	16	9	1	1	1	6	7	31	1	31	-4	25	16	##	0	1	1	1	3	1	2	1	4	4	4	1	1	2	4	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
7	2	16	9	1	1	1	7	7	31	2	30	-5	24	15	##	1	1	1	3	2	1	1	4	4	4	2	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
8	2	16	9	1	1	1	8	7	31	3	29	-6	23	14	##	2	1	1	1	3	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
524287	2	16	16	16	16	16	15	0	##	17	##	17	1	##	17	31	1	1	1	3	1	5	5	5	5	5	5	1	1	1	1	3	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	
524288	2	16	16	16	16	16	16	0	##	18	##	16	0	##	18	32	1	1	1	3	1	7	7	7	7	7	2	1	2	2	7	2	2	7	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1		
524289	2	16	1	1	1	1	15	31	##	44	1	30	29	##	##	1	1	1	3	1	1	6	6	6	6	6	1	1	2	1	6	1	1	2	1	6	1	1	2	1	6	1	1	2	1	6	1	1	2	1	

#### Bedingungsspalten

- T Zahlen kleiner als 1 (dann 1, sonst 0)
- U Zahlen größer als 16 (dann 1, sonst 0)
- V mehrfache Zahlen (1/0 - im blauen Bereich z.B. die 1 in Zelle E ist 5 x vertreten)
- W Wahre Lösung, wenn alle Tests bestanden (also jeweils 0)

Wertebereich A, B und C werden manuell eingegeben. A und B bleiben fest, die Variable C läuft von 1 bis 8 bzw. von 9 bis 16 – insgesamt 524.289 Zeilen und dazu passende Berechnungen.

Jeder Rechengang dauert ca. eine Minute, dann können die Ergebnisse im Bereich A7 bis AP524295 kopiert werden (per STRG C) im zweiten Blatt als Werte eingefügt werden (rechte Maustaste – Inhalte einfügen – Werte) und die Werte im zweiten Blatt nach Spalte W sortiert werden.

Die richtigen Ergebnisse können dann im Sortierbereich (Rosa) kopiert und in einem separaten Auswertblatt gesichert werden.

Ablauf siehe Excelblatt rechts oben

WICHTIG: großen Bereich (linke obere bis rechte untere Ecke) markieren durch

1. In linke obere Zelle klicken (Zellenbezeichnung wird links oben angezeigt)
2. Doppelpunkt einfügen
3. Rechte untere Zelle manuell eingeben (zum Beispiel: A7 : AP524295)
4. Entertaste drücken – Bereich ist blau gestrichelt markiert



(siehe Anhang A2 - 7 bis 10)

Datenblatt für Basislösungen z.B. a = 3 und 4 - Datei: MagQuad\_4\_Alle\_Basislösungen\_34.xlsx

Sammlung aller Ergebnisse der Berechnungen für A = 1/2 und 3/4 bzw. 5/6 und 7/8

a	b	c	d	16	3	2	13	2	7	9	16	1	10	8	15	M..._9.nb*	A	3	bzw.	4																
e	f	g	h	5	10	11	8	13	12	6	3	7	16	2	9	Basislösung	B	1	2	3	4	5	6	7	8	9										
i	j	k	l	9	6	7	12	8	1	15	10	14	5	11	4	B 221	C	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9					
m	n	p	q	4	15	14	1	11	14	4	5	12	3	13	6	B 404	404	x	8	x	30	x	x	x	3	x	24	x	41	x	8	x	28	16	12	
Magisches Quadrat 4. Ordnung																476	x	32	x	8	x	9	x	x	x	49	x	34	x	32	x	8	23	20		
																880																				
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	lfd.																				
4	9	5	16	15	6	10	3	14	7	11	2	1	12	8	13	Nr.																				
3	1	14	16	8	15	2	9	13	6	11	4	10	12	7	5	1	# = 1	3	1	14	16	3	1	14	16	3	1	14	16	3	1	14	16			
3	1	14	16	12	15	2	5	13	10	7	4	6	8	11	9	2	a	b	c	d	8	15	2	9	12	15	2	5	13	15	2	4	13	15	2	4
3	1	14	16	13	15	2	4	8	6	11	9	10	12	7	5	3	e	f	g	h	13	6	11	4	13	10	7	4	8	6	11	9	12	10	7	5
3	1	14	16	13	15	2	4	12	10	7	5	6	8	11	9	4	i	j	k	l	10	12	7	5	6	8	11	9	10	12	7	5	6	8	11	9
3	1	16	14	13	15	4	2	8	6	9	11	10	12	5	7	5	m	n	p	q																
3	1	16	14	13	15	4	2	12	10	5	7	6	8	9	11	6																				

Die Lösungsmenge umfasst alle richtigen Lösungen für A = 3 und 4, darin sind natürlich auch die enthalten die sich nach Transformation aus anderen Bereichen A = 1/2 bzw. 5/6 und 7/8 ergeben.

WICHTIG: Formel in viele Zellen (horizontal oder vertikal) kopieren durch

1. Formeln im Wunschbereich markieren und durch STRG C dann in den Speicher kopieren
2. In linke obere Zelle klicken und den gewünschten neuen Zellbereich eingeben mit z.B. B2:AX105 (Bereich ist jetzt blau gestrichelt markiert)
3. STRG U drücken – damit werden die Originalgleichungen aus dem Speicher in diesen neuen Bereich kopiert.

Selektion aller Lösungen - Datei: MagQuad\_4\_alle\_Lösungen\_12345678.xlsx

(siehe Anhang A2 - 11)

Die vier oben genannten Basislösungen müssen noch um die „transformierten“ mehrfach Ergebnisse bereinigt werden. Dazu werden im ersten Schritt alle Ergebnisse (3498) entsprechend den Transformationsgesetzen berechnet.

Dann werden die zellenbezogenen 16 Teilelemente in ein zwei-Digit Textwort der 16 Zellen umgewandelt (aus der Zahl 1 wird „01“, große Zahlen wie 16 bleiben)

A4, die vierte Lösung 

1	3	14	16	10	13	4	7	15	6	11	2	8	12	5	9
---	---	----	----	----	----	---	---	----	---	----	---	---	----	---	---

 ergibt sich auch aus einer „diagonal rechts oben“ Transformation der 160-igsten Basislösung

vertikal	Original	A	1/ 2 bis 7/ 8
16 15 02 01	01 02 15 16	B	1 2 3
05 03 14 12	12 14 03 05	C	1 9 1 9 1 9
04 10 07 13	13 07 10 04	A	416 x x x x 3 x 8
09 06 11 08	08 11 06 09		400 x 3 x x x 26
90 Grad li	diagonal li ob	B	404 x 8 x 30 x x
16 05 04 09	09 04 05 16	C	476 x 32 x 8 x 9
15 03 10 06	06 10 03 15		432 x 8 x 30 x 38
02 14 07 11	11 07 14 02	D	456 x 34 x 12 x 46
01 12 13 08	08 13 12 01		460 x 37 x 47 x 4
Transformationen		D	454 x 47 x 39 x 40
01 12 13 08	08 13 12 01		<b>3498</b>
02 14 07 11	11 07 14 02		
15 03 10 06	06 10 03 15		
16 05 04 09	09 04 05 16		
diagonal re ob	90 Grad re		
09 06 11 08	08 11 06 09		
04 10 07 13	13 07 10 04		
05 03 14 12	12 14 03 05		
16 15 02 01	01 02 15 16		
180 Grad rot.	horizontal		

lfd. Nr.	Magische Tabelle: Original:	Magische Tabelle: Original in 2 Digit Darstellung	diagonal li ob
	a b c d e f g h i j k l m n o p	a b c d e f g h i j k l m n o p	
A1	1 2 15 16 12 14 3 5 13 7 10 4 8 11 6 9	01 02 15 16 12 14 03 05 13 07 10 04 08 11 06 09	09 04 05 16 06 10 03 15
A2	1 2 15 16 13 14 3 4 12 7 10 5 8 11 6 9	01 02 15 16 13 14 03 04 12 07 10 05 08 11 06 09	09 05 04 16 06 10 03 15
A3	1 2 16 15 13 14 4 3 12 7 9 6 8 11 5 10	01 02 16 15 13 14 04 03 12 07 09 06 08 11 05 10	10 06 03 15 05 09 04 16
A4	1 3 14 16 10 13 4 7 15 6 11 2 8 12 5 9	01 03 14 16 10 13 04 07 15 06 11 02 08 12 05 09	09 02 07 16 05 11 04 14
A5	1 3 14 16 12 13 4 5 15 8 9 2 6 10 7 11	01 03 14 16 12 13 04 05 15 08 09 02 06 10 07 11	11 02 05 16 07 09 04 14
A6	1 3 14 16 15 13 4 2 10 6 11 7 8 12 5 9	01 03 14 16 15 13 04 02 10 06 11 07 08 12 05 09	09 07 02 16 05 11 04 14

Frage: Warum gibt es angeblich 3498 Basislösungen, denn die nach Transformation verbleibenden 880 Lösungen multipliziert mit 4 ergäbe 3520

Wo sind die fehlenden 22 Basislösungen ?

- Bei B3 könnten 12 fehlen - damit dann B3 = 416 = ein Vielfaches von 16 ???
- bei B4 könnten 4 fehlen - dann wären es 480 Basislösungen
- bei C6 könnten .8 fehlen
- bei D7 könnten 4 fehlen
- bei D8 könnten 10 fehlen ?????

Man beachte die unterschiedliche Anzahl der Basislösungen für A1 (416) bis D8 (454), darin ist keine Systematik erkennbar.

